

Tema 1: Cálculo vectorial

FÍSICA XERAL I

GRAO EN FÍSICA



- 1 Introducción
- 2 Operaciones con vectores
 - Producto escalar
 - Producto vectorial
 - Producto mixto
 - Doble producto vectorial
- 3 Vectores deslizantes
 - Momento respecto a un punto
 - Momento respecto a un eje
- 4 Sistema de vectores deslizantes
 - Resultante general
 - Momento resultante

1. Introducción

- Magnitud escalar

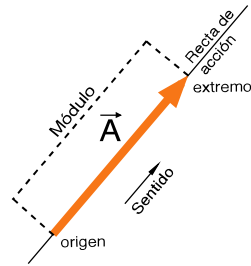
Su cuantía queda perfectamente determinada por un número real acompañado de la unidad elegida para medirla

- Magnitud vectorial

Además de un número real y la unidad correspondiente, requieren conocer la dirección en que actúa y su sentido. Se representa por un **vector**

Características de un vector

- Módulo
- Dirección
- Sentido



- Vector unitario

Cuando su módulo vale la unidad. Se denomina también **versor**

- Vector nulo

Cuando su módulo vale cero

Clasificación de los vectores

- Deslizante
Puede trasladarse sobre su recta de acción sin que varíe el efecto que produce
- Ligado o fijo
No puede desvincularse de su punto de aplicación sin variar el efecto que produce
- Libre
Puede aplicarse en cualquier punto sin que varíe el efecto que produce

- **Vectores equipolentes**

Cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido

- **Vector libre asociado a un vector deslizante**

Es el vector libre equipolente al vector deslizante

- **Vector libre asociado a un vector ligado**

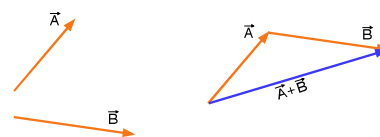
Es el vector libre equipolente al vector ligado

- **Igualdad de vectores**

- ▶ Dos vectores libres equipolentes se dicen iguales
- ▶ Dos vectores deslizantes equipolentes que actúan sobre la misma recta de acción, se dice que son iguales
- ▶ Dos vectores ligados equipolentes con el mismo punto de aplicación, se denominan iguales

- **Suma geométrica de vectores**

- Sean \vec{A} y \vec{B} dos vectores libres
- colocamos el vector \vec{A} en un punto cualquiera
- en el extremo de \vec{A} colocamos el \vec{B}
- unimos el origen de \vec{A} con el extremo de \vec{B}



- **Diferencia geométrica de vectores**

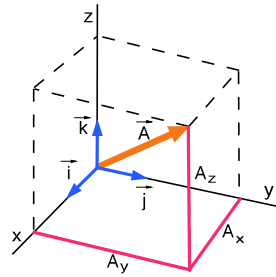
La diferencia de los vectores \vec{A} y \vec{B} es igual a la suma de los vectores \vec{A} y $-\vec{B}$, que es un vector igual a \vec{B} pero con sentido opuesto.

- **Producto de un escalar m por un vector \vec{A}**

Es otro vector de módulo m veces el de \vec{A} , de la misma dirección y de igual u opuesto sentido según m sea positivo o negativo

- Componentes cartesianas de un vector

- Sea XYZ un sistema de coordenadas cartesiano e $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ la base vectorial.
- Consideremos el vector \vec{A} aplicado en el origen de coordenadas
- Se denominan **componentes cartesianas** de \vec{A} a las proyecciones de dicho vector sobre los ejes cartesianos



- El módulo del vector \vec{A} viene dado por

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1)$$

- Todo vector \vec{A} puede escribirse en función de las componentes

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (2)$$

- Cosenos directores

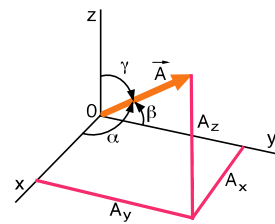
Se denominan **cosenos directores** de un vector, respecto de un sistema de coordenadas ortogonales, a los cosenos de los ángulos que dicho vector forma con el sentido positivo de los ejes coordenados.

Si representamos por α, β, γ los ángulos que el vector \vec{A} forma con los ejes XYZ, resulta entonces que

$$A_x = A \cos \alpha, \quad A_y = A \cos \beta, \quad A_z = A \cos \gamma \quad (3)$$

o bien, si elevamos al cuadrado y tenemos en cuenta la expresión (1)

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (4)$$



Ejemplo 1

Un vector libre de módulo 28 tiene sus cosenos directores proporcionales a $-1, -\frac{3}{2}, 3$. Determinar dicho vector.

Si n es la constante de proporcionalidad, tendremos

$$\cos \alpha = n \cdot (-1), \quad \cos \beta = n \cdot \left(-\frac{3}{2}\right), \quad \cos \gamma = n \cdot 3$$

Para calcular n tendremos en cuenta que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

$$n^2 + \frac{9}{4}n^2 + 9n^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad n = \pm \frac{2}{7}$$

por consiguiente

$$\cos \alpha = \mp \frac{2}{7}, \quad \cos \beta = \mp \frac{3}{7}, \quad \cos \gamma = \pm \frac{6}{7}$$

y como el módulo del vector es 28, las componentes del vector serán

$$A_x = \mp 8, \quad A_y = \mp 12, \quad A_z = \pm 24$$

o en forma vectorial

$$\vec{A} = \pm(-8\vec{i} - 12\vec{j} + 24\vec{k})$$

2. Operaciones con vectores

• Producto escalar

El producto escalar de dos vectores \vec{A} y \vec{B} es un **escalar**, cuyo valor es el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman sus sentidos positivos

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cos \theta \quad (5)$$

Como la proyección del vector \vec{B} sobre el \vec{A} es

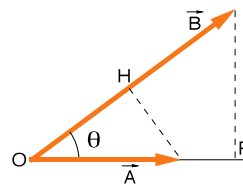
$$\text{proy}_A B = OP = B \cos \theta$$

y la proyección del vector \vec{A} sobre el \vec{B}

$$\text{proy}_B A = OH = A \cos \theta$$

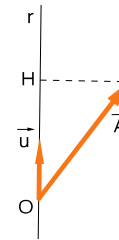
resulta que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \text{ proy}_A B = B \text{ proy}_B A$$



Para proyectar un vector sobre una determinada dirección, bastará multiplicar escalarmente dicho vector por el vector unitario en esa dirección

$$\text{proy}_r A = OH = \vec{A} \cdot \vec{u}$$



Propiedades del producto escalar

- 1 $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$
- 2 $m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (m\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (m\vec{B})$
- 3 $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

Consecuencias inmediatas de lo anterior, son

- ▶ Si $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, entonces \vec{A} y \vec{B} son perpendiculares
- ▶ $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ y $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$
- ▶ Dados $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ y $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$, se verifica

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

$$\vec{B} \cdot \vec{B} = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

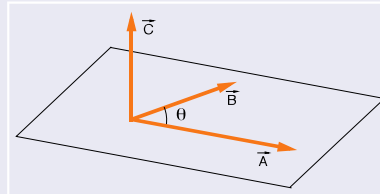
- Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores \vec{A} y \vec{B} es otro **vector** $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$, de las siguientes características:

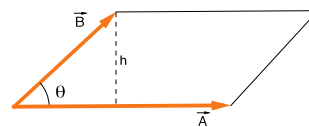
- **módulo**

$$C = A \cdot B \operatorname{sen}\theta \quad (6)$$

- **dirección** : perpendicular al plano determinado por los vectores \vec{A} y \vec{B}
- **sentido**: el que hace que el triedro \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} tenga la misma orientación que la base vectorial \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}



Geoméricamente, el módulo del producto vectorial de dos vectores representa el área del paralelogramo que determinan ambos vectores



$$\text{área} = A h = A B \operatorname{sen}\theta = |\vec{A} \wedge \vec{B}|$$

Propiedades del producto vectorial

- 1 $\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$
- 2 $m (\vec{A} \wedge \vec{B}) = (m\vec{A}) \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge (m\vec{B})$
- 3 $\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$

De las características del producto vectorial, se deduce

- ▶ Si $A \neq 0$, $B \neq 0$ y $\vec{A} \wedge \vec{B} = 0$, entonces \vec{A} y \vec{B} tienen la misma dirección
- ▶ $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$ y $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$
- ▶ Dados $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ y $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$, se deduce que la expresión analítica del producto vectorial es

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (7)$$

• Producto mixto de tres vectores

Se denomina producto mixto de tres vectores \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} al *escalar* que resulta de realizar la operación

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

Analíticamente el producto mixto equivale a

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad (8)$$

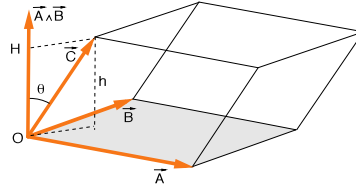
y de acuerdo con las propiedades de los determinantes, resulta

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) \quad (9)$$

Geoméricamente el producto mixto de tres vectores equivale al volumen del paralelepípedo que determinan

$$\text{área de la base} = |\vec{A} \wedge \vec{B}|$$

$$\text{altura} = h = C \cos \theta$$



$$\text{volumen} = |\vec{A} \wedge \vec{B}| C \cos \theta = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$$

- ▶ Si $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ y $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = 0$, entonces \vec{A} , \vec{B} y \vec{C} están contenidos en el mismo plano (coplanarios)

▼ Doble producto vectorial

El doble producto vectorial $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$ es un **vector** perpendicular al plano que determinan los vectores \vec{A} y $(\vec{B} \wedge \vec{C})$ y por lo tanto coplanario con los vectores \vec{B} y \vec{C} , resultando que

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (10)$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \neq (\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$$

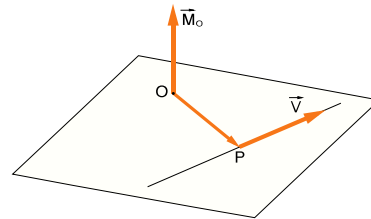
3. Vectores deslizantes

● Momento respecto a un punto

Sea \vec{V} un vector deslizante y O un punto del espacio

Se define el momento del vector \vec{V} respecto al punto O como un **vector ligado a O**, equipolente al vector

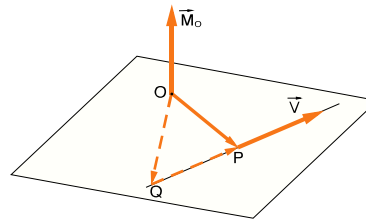
$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{V} \quad (11)$$



Al momento respecto al origen de coordenadas se le denomina **momento principal**.

- El momento \vec{M}_O es independiente del punto P elegido sobre la recta.

En efecto. Sea Q otro punto cualquiera sobre la recta de acción de \vec{V}



En la figura podemos ver que: $\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$. Al sustituir el vector \vec{OP} en la ecuación (11), resulta

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{V} = (\vec{OQ} + \vec{QP}) \wedge \vec{V} = \vec{OQ} \wedge \vec{V} + \vec{QP} \wedge \vec{V}$$

pero como podemos ver en la figura: \vec{QP} y \vec{V} son paralelos y por consiguiente $\vec{QP} \wedge \vec{V} = 0$. Resultando finalmente que

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{V} = \vec{OQ} \wedge \vec{V}$$

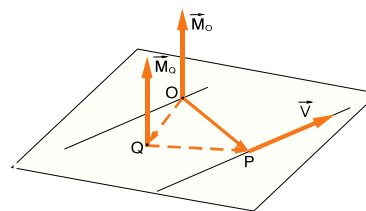
- Relación entre los momentos de un vector

Vamos a relacionar el momento del vector \vec{V} calculado respecto a un punto O con el calculado respecto a otro punto Q.

Si tenemos en cuenta que

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{V}$$

$$\vec{M}_Q = \vec{QP} \wedge \vec{V}$$



y como podemos ver en la figura: $\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$. Resulta entonces

$$\vec{M}_O = \vec{OP} \wedge \vec{V} = (\vec{OQ} + \vec{QP}) \wedge \vec{V} = \vec{OQ} \wedge \vec{V} + \vec{QP} \wedge \vec{V}$$

es decir

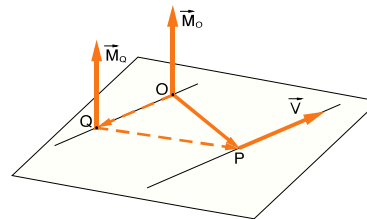
$$\vec{M}_O = \vec{M}_Q + \vec{OQ} \wedge \vec{V} \tag{12}$$

- El momento respecto a un punto no varía, si se desplaza dicho punto paralelamente a la recta de acción del vector \vec{V}

Tomemos un punto cualquiera Q sobre la recta que pasando por O, es paralela a la recta de acción de \vec{V} .

Dado que por construcción los vectores \vec{OQ} y \vec{V} son paralelos, se cumple que

$$\vec{OQ} \wedge \vec{V} = 0$$



y si llevamos este último resultado a la ecuación (12), resulta

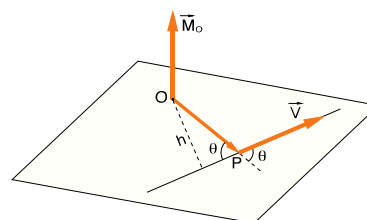
$$\vec{M}_O = \vec{M}_Q$$

- El módulo del momento de un vector respecto a un punto puede evaluarse de la siguiente forma

$$|\vec{M}_O| = |\vec{OP}| |\vec{V}| \text{ sen } \theta$$

Ahora bien, como

$$h = |\vec{OP}| \text{ sen } \theta$$



resulta que

$$|\vec{M}_O| = h |\vec{V}|$$

el módulo del momento respecto a un punto O, puede calcularse como el producto del módulo del vector por la distancia perpendicular trazada desde el punto O a la recta de acción del vector.

Ejemplo 2

Sea $\vec{A} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ un vector deslizante y $P(1,2,3)$ un punto de su recta de acción. Calcular: a) la distancia del origen a la recta de acción; b) el vector perpendicular trazado desde el origen a la recta de acción.

Como el momento del vector \vec{A} respecto al origen es independiente del punto de aplicación que tomemos sobre la recta de acción, tendremos

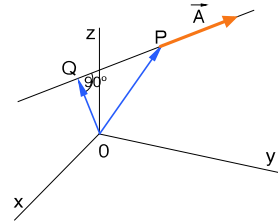
$$\vec{M}_o = \vec{OP} \wedge \vec{A} = \vec{OQ} \wedge \vec{A}$$

Como el vector \vec{OQ} es perpendicular a la recta de acción

$$|\vec{M}_o| = |\vec{OQ}| \cdot |\vec{A}| \cdot \text{sen } 90$$

y por lo tanto

$$|\vec{OQ}| = \frac{|\vec{M}_o|}{|\vec{A}|}$$



Realizando operaciones:

$$\vec{M}_o = \vec{OP} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$|\vec{M}_o| = \sqrt{4 + 25 + 16} = 3\sqrt{5}, \quad |\vec{A}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

$$|\vec{OQ}| = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$$

Para calcular ahora el vector \vec{OQ} procederemos de la siguiente forma

$$\vec{A} \wedge \vec{M}_o = \vec{A} \wedge (\vec{OQ} \wedge \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{A})\vec{OQ} - (\vec{A} \cdot \vec{OQ})\vec{A}$$

donde hemos utilizado la expresión del doble producto vectorial. Además, al ser $\vec{A} \cdot \vec{OQ} = 0$, ya que ambos vectores son perpendiculares, llegamos a

$$\vec{OQ} = \frac{\vec{A} \wedge \vec{M}_o}{A^2}$$

Haciendo operaciones

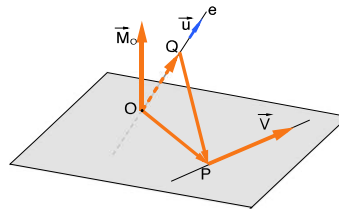
$$\vec{A} \wedge \vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 18\vec{i} + 9\vec{k}$$

$$\vec{OQ} = \frac{18\vec{i} + 9\vec{k}}{9} = 2\vec{i} + \vec{k}$$

• **Momento respecto a un eje**

Un eje es una recta en la que se define un sentido positivo mediante un vector unitario \vec{u} .

El momento de un vector deslizante respecto a un eje es el **escalar** que resulta de proyectar sobre el eje el momento del vector respecto de un punto cualquiera de la recta.



$$M_e = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = (\vec{OP} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{u} \quad (13)$$

- El momento respecto a un eje es independiente del punto elegido sobre dicho eje.

Sea Q otro punto del eje. Si tenemos en cuenta que $\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$, resulta

$$(\vec{OP} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{u} = [(\vec{OQ} + \vec{QP}) \wedge \vec{V}] \cdot \vec{u} = (\vec{OQ} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{u} + (\vec{QP} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{u}$$

Ahora bien, como $(\vec{OQ} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{u}$ es un producto mixto, podemos escribir

$$(\vec{OQ} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{u} = (\vec{V} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{OQ} = (\vec{u} \wedge \vec{OQ}) \cdot \vec{V} = 0$$

ya que los vectores \vec{u} y \vec{OQ} son paralelos.

Por lo tanto, la ecuación (13) adopta la forma

$$M_e = \vec{M}_O \cdot \vec{u} = (\vec{OP} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{u} = (\vec{QP} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{u} = \vec{M}_Q \cdot \vec{u}$$

Ejemplo 3

Dado el vector deslizante $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ cuya recta de acción es $x = \frac{3y+5}{2} = \frac{3z-1}{5}$, calcular el momento de dicho vector respecto al eje Z.

Dado que $O(0,0,0)$ es un punto del eje Z, calculemos el momento respecto a O del vector \vec{A} .

Tomemos un punto cualquiera de la recta de acción del vector, por ejemplo el $P(1,-1,2)$.

$$\vec{M}_o = \vec{OP} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$M_e = \vec{M}_o \cdot \vec{k} = 5$$

4. Sistema de vectores deslizantes

Se denomina **sistema de vectores deslizantes** al conjunto formado por un número cualquiera N de vectores deslizantes, $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_N$.

- **Resultante general**

Por definición, la **resultante general** de un sistema de N vectores deslizantes es el **vector libre suma de N vectores libres equipolentes a los del sistema**

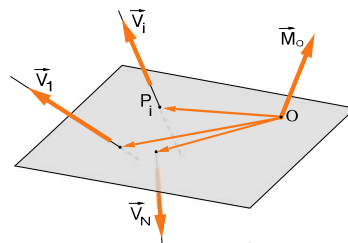
$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{V}_i \quad (14)$$

De la definición de resultante general se deduce que ésta es la misma en cualquier punto del espacio. Por ello a \vec{R} se le denomina **primer invariante** o **invariante vectorial** del sistema.

- **Momento resultante**

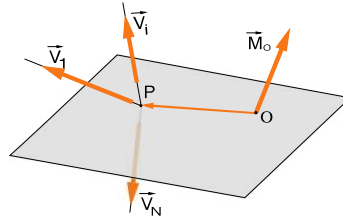
Se define el **momento del sistema** o **momento resultante** de un sistema de vectores deslizantes respecto a un punto a un **vector ligado** suma de los momentos de cada uno de los vectores del sistema respecto a dicho punto.

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N \vec{OP}_i \wedge \vec{V}_i \quad (15)$$



- Se dice que un sistema de vectores deslizantes es **concurrente** cuando las líneas de acción de todos los vectores que forman el sistema pasan por el mismo punto

Teniendo en cuenta que el momento de un vector deslizante respecto a un punto es independiente del punto de aplicación del vector sobre su recta de acción, podemos considerar para todos ellos el punto de concurrencia



Por lo tanto, teniendo en cuenta la ecuación (15), obtenemos

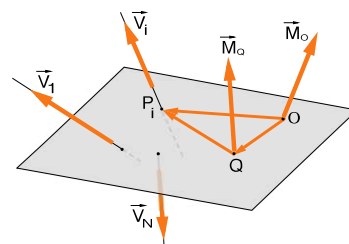
$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N \vec{OP} \wedge \vec{V}_i = \vec{OP} \wedge \sum_{i=1}^N \vec{V}_i = \vec{OP} \wedge \vec{R} \quad (16)$$

expresión que se conoce como **teorema de Varignon**

- Conocido el momento resultante respecto a un punto, podemos calcularlo en otro punto sin más que conocer la resultante general.

Teniendo en cuenta la expresión (12), podemos escribir para cada uno de los vectores \vec{V}_i

$$\vec{M}_{O,i} = \vec{M}_{Q,i} + \vec{OQ} \wedge \vec{V}_i$$



Sumando para todo el sistema

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_{O,i} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{Q,i} + \sum_{i=1}^N (\vec{OQ} \wedge \vec{V}_i)$$

y teniendo en cuenta que

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{O,i}, \quad \vec{M}_Q = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{Q,i}, \quad \sum_{i=1}^N (\vec{OQ} \wedge \vec{V}_i) = \vec{OQ} \wedge \sum_{i=1}^N \vec{V}_i$$

obtenemos finalmente

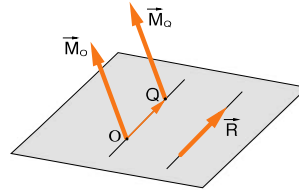
$$\vec{M}_O = \vec{M}_Q + \vec{OQ} \wedge \vec{R} \quad (17)$$

expresión que se denomina **teorema fundamental del paso de momentos**

- ▶ El momento resultante respecto a un punto no varía, si se desplaza dicho punto paralelamente a la resultante general.

Como podemos ver en la figura, los vectores \vec{OQ} y \vec{R} son paralelos, y por lo tanto

$$\vec{OQ} \wedge \vec{R} = 0$$



y al sustituir este resultado en la ecuación (17), llegamos a que

$$\vec{M}_O = \vec{M}_Q$$

- ▶ El producto escalar de la resultante general por el momento resultante respecto a un punto cualquiera, es un invariante.

Si multiplicamos escalarmente por \vec{R} la expresión (17), obtenemos

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_Q \cdot \vec{R} + (\vec{OQ} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{R}$$

y de acuerdo con las propiedades del producto mixto

$$(\vec{OQ} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{R} = (\vec{R} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{OQ} = 0$$

por lo tanto

$$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = \vec{M}_Q \cdot \vec{R} \quad (18)$$

El producto escalar del momento resultante por la resultante general es un invariante, y recibe el nombre de **segundo invariante** o **invariante escalar**

- Los sistemas de vectores deslizantes cuya resultante general es nula, engendran campos de momentos uniformes

Si sustituimos $\vec{R} = 0$ en la ecuación (17), nos queda que

$$\vec{M}_O = \vec{M}_Q$$

con independencia del punto considerado. Al sistema de vectores que satisface este resultado se le denomina *par*.

Ejemplo 4

Dado el sistema de vectores deslizantes $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{C} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$, siendo A(1,0,2), B(1,2,1) y C(0,0,0) puntos de sus respectivas rectas de acción, calcular: a) su resultante general; b) su momento resultante respecto al origen de coordenadas; c) su momento resultante respecto al punto P(1,1,1) utilizando el teorema del paso de momentos.

a)

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{M}_o &= \vec{OA} \wedge \vec{A} + \vec{OB} \wedge \vec{B} + \vec{OC} \wedge \vec{C} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -5\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \vec{M}_P &= \vec{M}_o + \vec{PO} \wedge \vec{R} = -5\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \end{aligned}$$